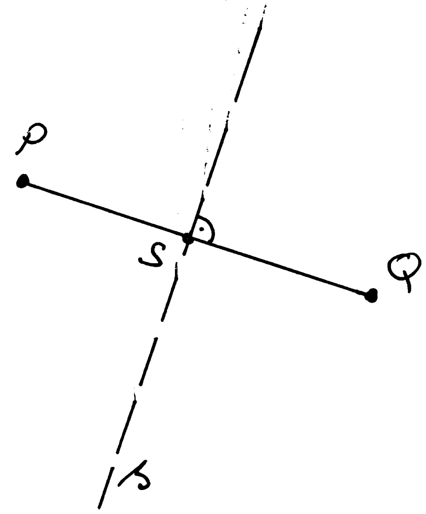
Definicija i modeli geometrije incidencije (nast.)

(#) Neka su date tačke $P, Q \in \mathbb{H}$ koje ne pripadaju istoj vertikalnoj pravoj. Koristeći se znanjem iz srednje škole Euklidske geometrije odrediti presjek simetrale duži $\overline{PQ}$ sa x-osom.



Rj:

$$\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

Neka je $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$.

Odredimo jednačinu simetrale s duži $\overline{PQ}$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow$$

koeficijent pravca prave $y = kx + n$ koja prolazi kroz tačke P i Q je $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$\Rightarrow$ sad možemo odrediti koeficijent pravca simetrale prave s $\quad k_s = -\dfrac{1}{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

$$k_s = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

Sredina S duži $\overline{PQ}$ ima koordinate $S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$s: \ y = k_s x + n$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \left(-\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right) \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + n \quad / \cdot 2(y_2 - y_1) \Rightarrow y_2^2 - y_1^2 = -(x_2^2 - x_1^2) + 2(y_2 - y_1)n$$

$$y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2 = 2(y_2 - y_1)n$$

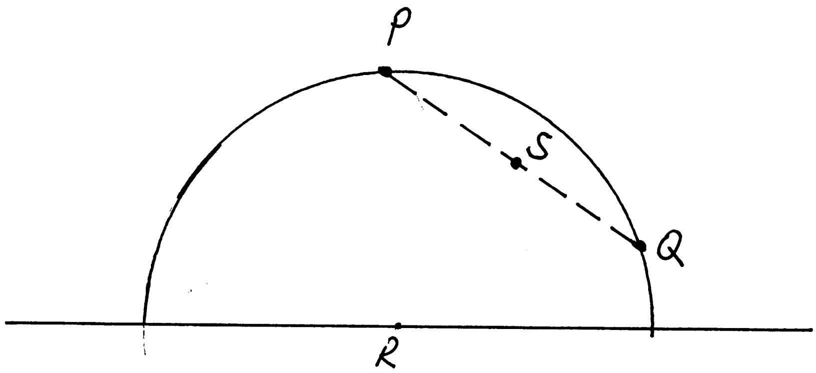
$$\Rightarrow n = \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(y_2 - y_1)} \Rightarrow s: \ y = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot x + \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(y_2 - y_1)}$$

Simetrala s siječe x-osu u nekoj tački $(c, 0)$ pa nije teško odrediti da je

$$c = \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)}.$$

\# Neka su date dvije različite tačke $P, Q \in \mathbb{H}$ i neka je $\mu(P,Q) = {}_cL_r$ (tačke P i Q pripadaju Poincarejevoj pravoj ${}_cL_r$).
Koristeći se znanjem Euklidske geometrije dokazati da je c x-koordinata presjeka simetrale duži PQ sa x-osom.

Rj.



Poincarejeva ravan $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$

$$\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

$${}_aL = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid x = a,\ x \text{ fiks.} \in \mathbb{R}\}$$

$${}_cL_r = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid (x-c)^2 + y^2 = r^2,\ c, r \text{ fiksir.} \in \mathbb{R}\}$$

Označimo sa R tačku $(c,0)$ (centar polukruga) i neka je S sredina duži PQ.

Prvo pokažimo da je $\overline{PR} \cong \overline{QR}$ $\quad P(x_1,y_1),\ Q(x_2,y_2),\ R(c,0)$

$$\overline{PR} = \sqrt{(x_1-c)^2 + (y_2-0)^2} \xRightarrow{P \in {}_cL_r} \overline{PR} = r$$

Slično $\quad \overline{QR} = \sqrt{(x_2-c)^2 + (y_2-0)^2} \xRightarrow{Q \in {}_cL_r} \overline{QR} = r$

Time imamo

$$\left.\begin{array}{l} \overline{PR} \cong \overline{QR} \\ \overline{RS} \cong \overline{RS} \\ \overline{PS} \cong \overline{QS} \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \Delta PSR \cong \Delta QSR$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle RSP = \sphericalangle RSQ = 90^\circ$$

Tačka R pripada simetrali stranice (duži $\overline{PQ}$) $\Rightarrow$ c jest x-koordinata presjeka simetrale duži PQ sa x-osom

Definicija (geometrija incidencije)

Abstraktnu geometriju $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ nazivamo geometrija incidencije ako

(i) Svake dvije različite tačke u $\mathcal{S}$ pripadaju jedinstvenoj pravoj.

(ii) Postoji skup od tri nekolinearne tačke.

Notacija

Ako je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ geometrija incidencije i ako su $P, Q \in \mathcal{S}$, tada jedinstvenu pravu ℓ kojoj obe tačke P i Q pripadaju ćemo označavati sa $\ell = \ell(P, Q)$.

(#) Pokazati da je Dekartova ravan $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ geometrija incidencije.

Rj. Ranije smo pokazali da je Dekartova ravan apstraktna geometrija. Ostalo je da pokažemo da su zadovoljene dvije osobine iz definicije geometrije incidencije.

SVAKE DVIJE RAZLIČITE TAČKE PRIPADAJU JEDINSTVENOJ PRAVOJ

Izaberimo dvije različite tačke $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$, $P \neq Q$ i pokažimo da postoji tačno jedna prava koja sadrži ove dvije tačke. Pretpostavićemo da P i Q pripada dvijema različitim pravama i doći ćemo do kontradikcije.

1° Pretpostavimo da P i Q pripadaju istovremeno na L_a i $L_{a'}$ gdje je $a \neq a'$.

$$\left.\begin{array}{l} P \in L_a \Rightarrow x_1 = a \\ Q \in L_a \Rightarrow x_2 = a \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = a; \quad \left.\begin{array}{l} P \in L_{a'} \Rightarrow x_1 = a' \\ Q \in L_{a'} \Rightarrow x_2 = a' \end{array}\right\} \Rightarrow x_1' = x_2' = a';$$

$\Rightarrow a = a'$
#kontradikcija
$(a \neq a')$

U stvari vidimo da bilo koja tačka ne može istovremeno pripadati dvijema različitim vertikalnim pravim.

2° Pretpostavimo da P i Q istovremeno pripadaju na L_a i $L_{m,b}$.

$$\left.\begin{array}{l} P \in L_a \Rightarrow x_1 = a \\ Q \in L_a \Rightarrow x_2 = a \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = a; \ \ldots(*) \quad \left.\begin{array}{l} P \in L_{m,b} \Rightarrow y_1 = m x_1 + b \\ Q \in L_{m,b} \Rightarrow y_2 = m x_2 + b \end{array}\right\} \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$

$\Rightarrow y_1 = ma + b = y_2 \Rightarrow P = Q$
#kontradikcija
$(P \neq Q)$

3° Pretpostavimo da P i Q pripadaju istovremeno na obe $L_{m,b}$ i $L_{n,c}$ i da je $L_{m,b} \neq L_{n,c}$. Tada

$P \in L_{m,b} \Rightarrow Y_1 = m x_1 + b$

$Q \in L_{m,b} \Rightarrow Y_2 = m x_2 + b$

Ako je $x_1 = x_2$ imamo da $Y_1 = m x_1 + b = m x_2 + b = Y_2$

$\Rightarrow P = Q$
#kontradikcija
$(P \neq Q)$

Prema tome mora biti $x_1 \neq x_2$ pa iz gornjeg sistema imamo

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} \quad i \quad b = Y_1 - m x_1 \qquad \ldots(1)$$

Slično

$$\left.\begin{array}{l} P \in L_{n,c} \Rightarrow Y_1 = n x_1 + c \\ Q \in L_{n,c} \Rightarrow Y_2 = n x_2 + c \end{array}\right\} \Rightarrow n = \frac{Y_2 - Y_1}{2^{-} 1} \quad i \quad c = Y_1 - n x_1 \qquad \ldots(2)$$

Ali na osnovu (1) i (2) imamo $n = m$ i $c = b$ tj. $L_{m,b} = L_{n,c}$
#kontradikcija
$(L_{m,b} \neq L_{n,c})$

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.
Prema tome svake dvije različite tačke pripadaju jedinstvenoj pravoj.

POSTOJI SKUP OD TRI NEKOLINEARNE TAČKE

Izaberimo tri tačke npr. $A(1,2)$, $B(1,3)$ i $C(2,7)$ i pokažimo da ne postoji vertikalna prava L_a kao ni horizontalna prava $L_{k,n}$ koja sadrži ove tri tačke. Pretpostavimo suprotno

$A, B, C \in L_a \Rightarrow a = 1 = 2$ #kontradikcija

$A, B, C \in L_{k,n} \Rightarrow A, B \in L_1$ i $A, B \in L_{k,n}$ #kontradikcija sa slučajem 2° iznad

Time smo pokazali da postoje tri nekolinearne tačke.

(#) Pokazati da je Poincarejeva ravan $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ geometrija incidencije.

Rj. Ranije smo pokazali da je Poincarejeva ravan apstraktna geometrija. Ostalo je još da pokažemo da vrijede dvije osobine iz definicije geometrije incidencije.

SVAKE DVIJE RAZLIČITE TAČKE IZ $\mathcal{H}$ PRIPADAJU JEDINSTVENOJ PRAVOJ

Neka su date tačke $P, Q \in \mathbb{H}$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $P \neq Q$. Pretpostavimo suprotno.

$${}_aL = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=a,\ y>0,\ a \text{ fiksan} \in \mathbb{R}\}$$

$${}_cL_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y>0,\ (x-c)^2 + y^2 = r^2,\ c, r \text{ fiksni} \in \mathbb{R}\}$$

1° Pretpostavimo da P i Q istovremeno pripadaju tip I pravama ${}_aL$ i ${}_{a'}L$ gdje je $a \neq a'$.

$$\left.\begin{array}{l} P \in {}_aL \Rightarrow x_1 = a \\ P \in {}_{a'}L \Rightarrow x_1 = a' \end{array}\right\} \Rightarrow a = a'$$

#kontradikcija

2° Pretpostavimo da P i Q istovremeno pripadaju pravama ${}_aL$ i ${}_cL_r$.

$$\left.\begin{array}{l} P \in {}_aL \Rightarrow x_1 = a \\ Q \in {}_aL \Rightarrow x_2 = a \end{array}\right\} \Rightarrow P(a, y_1),\ Q(a, y_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} P \in {}_cL_r \Rightarrow (a-c)^2 + y_1^2 = r^2 \\ Q \in {}_cL_r \Rightarrow (a-c)^2 + y_2^2 = r^2 \end{array}\right\} \overset{y>0}{\Rightarrow} y_1 = y_2 \Rightarrow P = Q$$

#kontradikcija

3° Pretpostavimo da P i Q istovremeno pripadaju pravama ${}_cL_r$ i ${}_dL_s$ gdje je ${}_cL_r \neq {}_dL_s$.

$$\left.\begin{array}{l} P \in {}_cL_r \Rightarrow (x_1-c)^2 + y_1^2 = r^2 \\ Q \in {}_cL_r \Rightarrow (x_2-c)^2 + y_2^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1-c)^2 - (x_2-c)^2 = y_2 - y_1 \Rightarrow$$

$x_1^2 - 2cx_1 - x_2^2 + 2cx_2 = y_2^2 - y_1^2 \Rightarrow \quad c = \dfrac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)}$

Na isti način

$$\left.\begin{array}{l} P \in {}_dL_s \\ Q \in {}_dL_s \end{array}\right\} \Rightarrow d = \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)}$$

ZAŠTO NIJE MOGUĆ SLUČAJ DA JE $x_1 = x_2$?

Time smo dobili da je $c = d$.

Kako je $r = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1 - d)^2 + y_1^2} = s$ to je $r = s$ pa time i ${}_cL_r = {}_dL_s$.

Prema tome svake dvije različite tačke iz $\mathcal{H}$ pripadaju jedinstvenoj pravoj.

POSTOJE TRI NEKOLINEARNE TAČKE

$$\boxed{\begin{array}{l} (x-c)^2 + y^2 = r^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 7^2 \end{array}}$$

Posmatrajmo npr. tačke $M(1,2)$, $N(1,7)$ i $R(7,7)$.

Primjetimo da $M, N \in {}_1L$, $R \notin {}_1L$

Ako bi postojala prava tipa I, ${}_aL$ koja sadrži sve tri tačke imali bi

$$\left.\begin{array}{l} M, N \in {}_aL \Rightarrow a = 1 \\ R \in {}_aL \Rightarrow a = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 7$$

#kontradikcija

Ako bi postojala prava tipa II, ${}_cL_r$ koja sadrži sve tri tačke imali bi

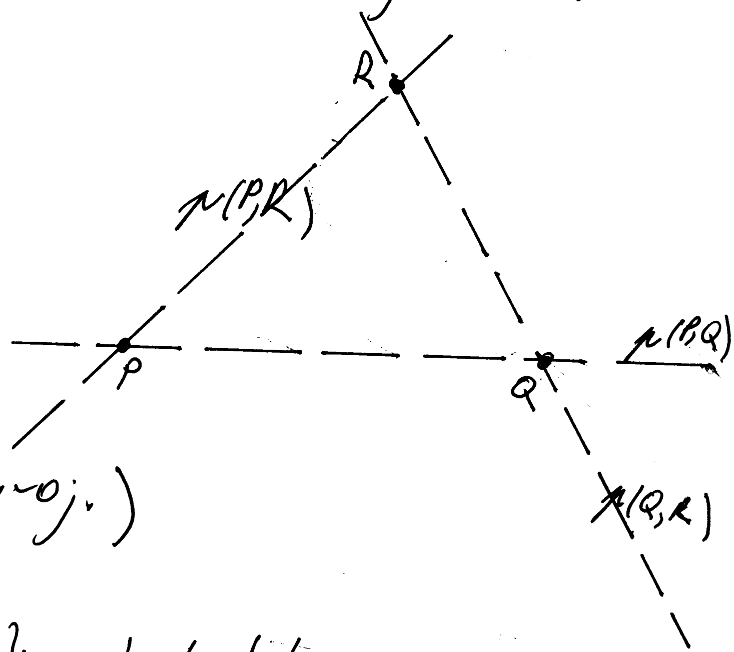
$$\left.\begin{array}{l} M, N \in {}_1L \\ M, N \in {}_cL_r \end{array}\right\} \Rightarrow$$ M i N pripadaju istovremeno dvjema različitim pravama ${}_1L$ i ${}_cL_r$

#kontradikcija
(sa slučajem 2° sa prethodne strane)

Poincareova ravan je geometrija incidencije.

(#) Neka je $\mathcal{S}=\{P,Q,R\}$ i $\mathcal{L}=\{p(P,Q), p(P,R), p(Q,R)\}$.
Pokazati da je $\{\mathcal{S},\mathcal{L}\}$ geometrija incidencije.

(Primjetimo da ovaj primjer ima konačno mnogo tački (u stvari ima samo tri tačke). Može se predstaviti kao na figuri desno. Ova geometrija se naziva geometrija tri tačke. Isprekidane linije predstavljaju koje tačke pripadaju istoj pravoj.)



Rj.

Trebamo pokazati da je $\{\mathcal{S},\mathcal{L}\}$ abstraktna geometrija te da vrijede dvije aksiome iz definicije geometrije incidencije ((i) svake dvije različite tačke u $\mathcal{S}$ pripadaju jedinstvenoj pravoj; (ii) postoji skup od tri nekolinearne tačke)

Pokažimo da je $\mathcal{S}$ abstraktna geometrija

ZA SVAKE DVIJE TAČKE $A,B\in\mathcal{S}$ POSTOJI PRAVA p t.d. $A\in p$ i $B\in p$

Date su samo tri tačke, pa postoje samo tri kombinacije za izbor dvije tačke P i Q, P i R, Q i R. Postoji prava za svaki izbor ove dvije tačke.

SVAKA PRAVA IMA NAJMANJE DVIJE TAČKE

Postoje samo tri prave i prema postavci zadatka svaka od njih sadrži dvije tačke

Prema tome $\{\mathcal{S},\mathcal{L}\}$ jest abstraktna geometrija.

Kako za svake dvije različite tačke u $\mathcal{S}$ postoji jedinstvena prava i kako postoje tri nekolinearne tačke $\{\mathcal{S},\mathcal{L}\}$ jest geometrija incidencije.

\# Neka je $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ i neka je $\mathcal{L}$ skup svih Dekartovih pravih koje leže u $\mathcal{S}$. Pokazati da $\{\mathcal{S},\mathcal{L}\}$ nije geometrija incidencije.

Rj.: Prisjetimo se:

Abstraktnu geometriju $\{\mathcal{S},\mathcal{L}\}$ nazivamo geometrija incidencije ako

(i) svake dvije različite tačke u $\mathcal{S}$ pripadaju jedinstvenoj pravoj

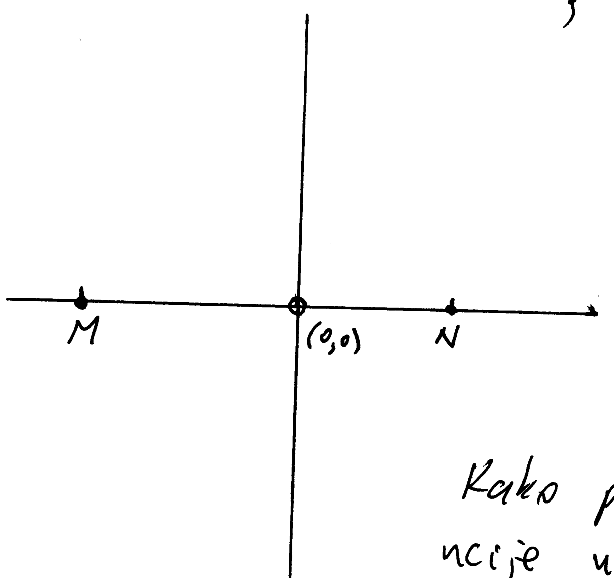
(ii) postoji skup od tri nekolinearne tačke

Dekartove prave $L_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=a,\ a \text{ fiksir. real. br.}\}$

$L_{k,n} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=kx+n,\ k \text{ i } n \text{ fiksir. real. brojevi}\}$

Trebamo pokazati ili da $\{\mathcal{S},\mathcal{L}\}$ nije apstraktna geometrija ili da nije zadovoljena aksioma (i) ili da nije zadovoljena aksioma (ii).

Posmatrajmo aksiomu (i), i posmatrajmo tačke $^{\text{npr.}}M(-3,0)$ i $N(3,0)$.

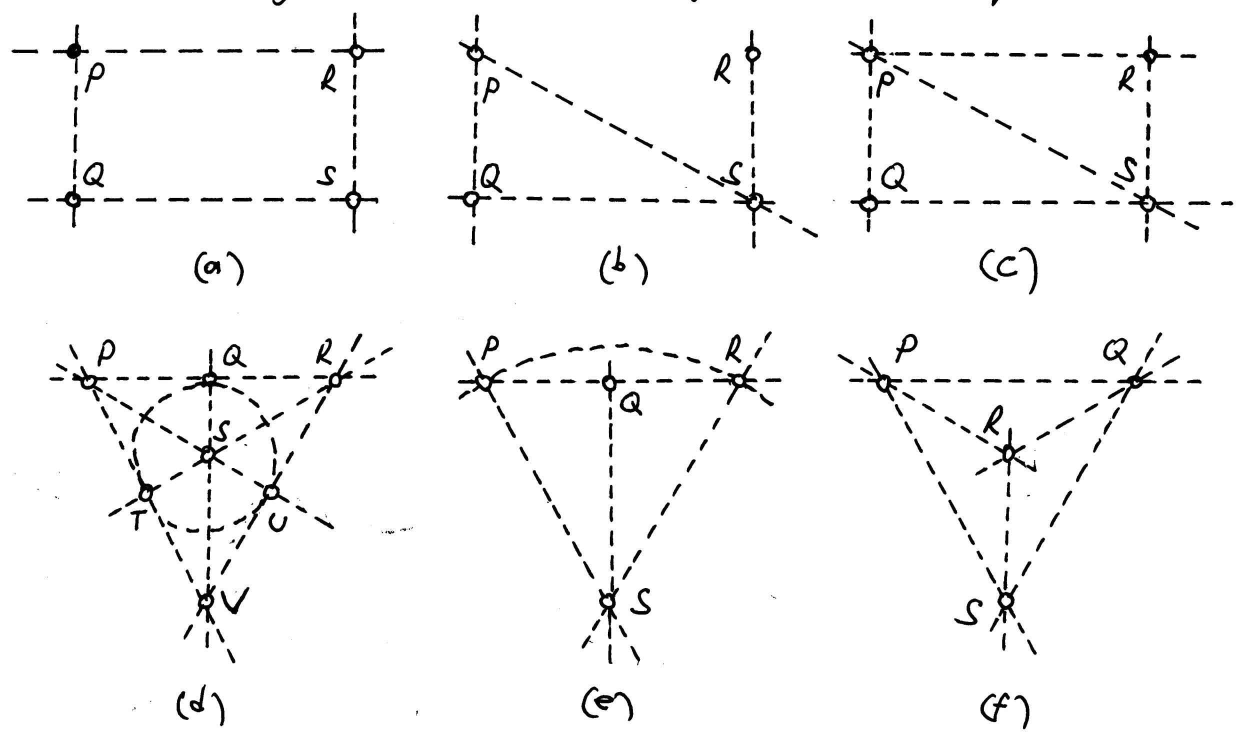


Primjetimo da ne postoji vertikalna prava koja sadrži ove dvije tačke. Jedina ne-vertikalna prava koja sadrži ove dvije tačke je $y=0$ tj. $L_{0,0}$ ali $L_{0,0}\notin\mathcal{L}$ u ovom slučaju. $(O(0,0)\notin\mathcal{S})$.

Kako prva aksioma iz definicije geometrije incidencije nije zadovoljena to $\{\mathcal{S},\mathcal{L}\}$ nije geometrija incidencije.

"Dokaži" može značiti "pronađi kontraprimjer (protuprimjer)"

(#) Neke konačne geometrije su definisane slikom (kao geometrija 3-tačke u jednom od prethodnih problema)



(i) U svakom od datih primjera ispiši skup pravih.

(ii) Koje od ovih geometrija su apstraktne geometrije.

(iii) Koje od ovih geometrija su geometrije incidencije.

Rj.:

(i)

(a) $p(P,Q)$, $p(P,R)$, $p(Q,S)$, $p(R,S)$

(b) $p(P,Q)$, $p(P,S)$, $p(Q,S)$, $p(R,S)$

(c) $p(P,R)$, $p(P,S)$, $p(P,Q)$, $p(Q,S)$, $p(R,S)$

(d) $p(P,Q,R)$, $p(P,T,V)$, $p(P,S,U)$, $p(T,U,Q)$, $p(V,U,R)$, $p(V,S,Q)$, $p(R,S,T)$

(e) $p(P,R)$, $p(P,Q,R)$, $p(S,P)$, $p(S,Q)$, $p(S,R)$

(f) $p(P,Q)$, $p(P,R)$, $p(P,S)$, $p(S,R)$, $p(S,Q)$, $p(Q,R)$

(ii) Prva aksioma apstraktne geometrije je da za svake dvije tačke $A, B \in \mathcal{S}$ postoji prava $p \in \mathcal{L}$ takva da $A \in p$ i $B \in p$

(a) primjetimo da za tačke Q i R ne postoji prava $\Rightarrow$ data geometrija nije apstraktna

(b) za tačke P i R ne postoji prava $\Rightarrow$ data geometrija nije apstraktna

(c) za tačke Q i R ne postoji prava $\Rightarrow$ geometrija nije apstraktna.

(d) dvije osobine iz definicije su zadovoljene $\Rightarrow$ geometrija je apstraktna

(e) geometrija je apstraktna

(f) geometrija je apstraktna.

(iii) Za geometriju $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ kažemo da je geometrija incidencije ako je geometrija apstraktna i ako vrijedi

(i) svake dvije različite tačke u $\mathcal{S}$ pripadaju jedinstvenoj pravoj

(ii) postoje tri nekolinearne tačke

S obzirom da geometrije pod (a), (b), (c) nisu apstraktne geometrije to one nisu ni geometrije incidencije.

(e) primjetimo da kroz tačke P i R prolaze dvije različite prave $p(P,R)$ i $p(P,R) = p(P,Q) = p(Q,R)$, pa ova geometrija nije geometrija incidencije.

Geometrije incidencije su (d) i (f)

(#) Neka su $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{L}_1\}$ i $\{\mathcal{S}_2, \mathcal{L}_2\}$ apstraktne geometrije. Neka je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ i $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Dokaži da je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ apstraktna geometrija.

Rj.

Tvrdnja nije uvijek tačna. Pokazaćemo da tvrdnja nije uvijek tačna tako što ćemo pronaći primjer u kome tvrdnja ne vrijedi.

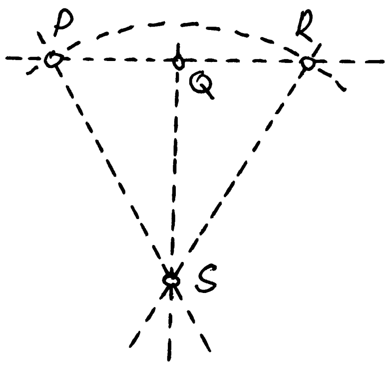
Npr. neka su $A \in \mathcal{S}_1$ i $B \in \mathcal{S}_2$ takve da $A, B \notin \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. (ili pretpostavimo da $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$).

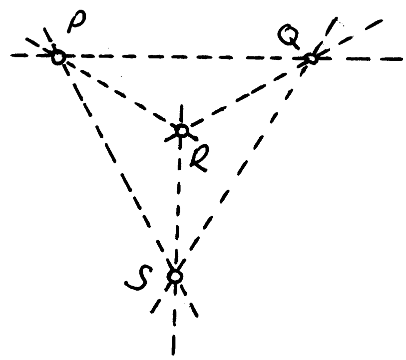
Tada za tačke A i B ne postoji prava koja sadrži obe ove tačke.

Kako prva aksioma iz definicije apstraktne geometrije nije zadovoljena to $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ nije apstraktna geometrija.

Neka su $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{L}_1\}$ i $\{\mathcal{S}_2, \mathcal{L}_2\}$ apstraktne geometrije. Ako je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ i $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ dokazati da je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ apstraktna geometrija.

Rj: Posmatrajmo dvije konačne geometrije iz jednog od prethodnih zadataka.





$\{\mathcal{S}_1, \mathcal{L}_1\}$

$\{\mathcal{S}_2, \mathcal{L}_2\}$

$\mathcal{S}_1 = \{P, Q, R, S\}$

$\mathcal{S}_2 = \{P, Q, R, S\}$

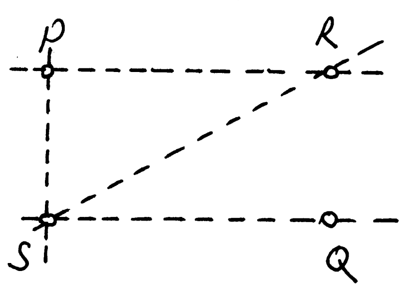
$\mathcal{L}_1 = \{p(P,R), \underbrace{p(P,R) = p(P,Q) = p(R,Q)}_{=p(P,Q,R)}, p(P,S), p(S,Q), p(S,R)\}$

$\mathcal{L}_2 = \{p(P,Q), p(P,R), p(P,S), p(S,R), p(S,Q), p(Q,R)\}$

Odredimo $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ i $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$:

$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{P, Q, R, S\}$

$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{p(P,R), p(P,S), p(Q,S), p(R,S)\}$



Primjetimo da ovo nije apstraktna geometrija.

Pronašli smo primjer u kome data tvrdnja ne vrijedi.

Definicija (paralelnosti)

Ako su p_1 i p_2 dvije prave iz abstraktne geometrije tada kažemo da je p_1 paralelno sa p_2 (i pišemo $p_1 \parallel p_2$) ako je ili $p_1 = p_2$ ili $p_1 \cap p_2 = \emptyset$.

(#) Neka su p_1 i p_2 prave u geometriji incidencije. Pokazati da ako $p_1 \cap p_2$ sadrži dvije ili više od dvije različite tačke tada $p_1 = p_2$.

Rj. Prema postavci zadatka presjek $p_1 \cap p_2$ sadrži najmanje dvije različite tačke P i Q.

$P \in p_1 \cap p_2 \Rightarrow P \in p_1$ i $P \in p_2$

$Q \in p_1 \cap p_2 \Rightarrow Q \in p_1$ i $Q \in p_2$

Aksioma (i) iz definicije geometrije incidencije kaže da svake dvije različite tačke pripadaju jedinstvenoj pravoj ... (*)

$P \neq Q \stackrel{(*)}{\Rightarrow}$ $\exists$ jedinstvena prava $p(P,Q)$ koja sadrži tačke P i Q

$$\left.\begin{array}{l} P \in p_1 \text{ i } Q \in p_1 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} p_1 = p(P,Q) \\ P \in p_2 \text{ i } Q \in p_2 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} p_2 = p(P,Q) \end{array}\right\} \Rightarrow p_1 = p_2$$

q.e.d.

(#) U Dekartovoj ravni $\mathcal{E}=\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ pronađi sve prave koje prolaze kroz tačku $P(0,1)$ i koje su paralelne sa vertikalnom pravom L_6.

Rj. Dekartova ravan $\mathcal{E}=\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$

$$L_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=a, \ a \text{ je fiksiran realan broj}\}$$

$$L_{k,n}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=kx+n, \ k \text{ i } n \text{ su fiksirani realni brojevi}\}$$

$$p_1 \parallel p_2 \iff p_1\cap p_2=\emptyset \ \text{ ili } \ p_1=p_2 .$$

$P(0,1)$, $L_6=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=6\}$

Koliko vertikalnih pravih L_a postoji koje prolaze kroz tačku $P(0,1)$?

Postoji samo jedna takva vertikalna prava i ona je L_0

Kako je sistem $\begin{array}{c} x=0 \\ x=6 \\ \hline \end{array}$ nemoguć to $L_6\cap L_0=\emptyset \Rightarrow L_6\parallel L_0$.

Kakvog su oblika ne-vertikalne prave koje prolaze kroz tačku $P(0,1)$?

$$\begin{array}{l} P(0,1) \\ y=kx+n \end{array} \Rightarrow 1=k\cdot 0+n \Rightarrow n=1$$

Ne-vertikalne prave koje prolaze kroz tačku $P(0,1)$ su oblika $L_{k,1}$ gdje je $k\in\mathbb{R}$.

Da li postoji k t.d. $L_6\cap L_{k,1}=\emptyset$? $\begin{array}{c} y=kx+1 \\ x=6 \\ \hline \end{array}$

Ovaj sistem uvijek ima rješenje.

Takvo k ne postoji.

Jedina prava koja prolazi kroz tačku $P(0,1)$ i koja je paralelna sa vertikalnom pravom L_6 je prava L_0.

(#) U Poincarejevoj ravni $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ odrediti sve prave koje prolaze kroz tačku $P(0,1)$ i koje su paralelne sa tip I pravom ${}_6L$.

Rj:

Poincarejeva ravan $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$, $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

${}_aL = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid x = a,$ a je fiksiran realan broj$\}$

${}_cL_r = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid (x-c)^2 + y^2 = r^2,$ c i r su fiksirani realni brojevi$\}$

$$p \parallel q \iff p \cap q = \emptyset \text{ ili } p = q$$

$P(0,1)$; $\quad {}_6L = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid x = 6\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 6, y > 0\}$.

Odredimo kakvog su oblika prave ${}_aL$ tipa I koje prolaze kroz tačku P?

Postoji samo jedna prava tipa I koja prolazi kroz P i to je ${}_0L$.

Kako sistem $\begin{array}{l} x=0 \\ x=6 \end{array}$ nije moguć to ${}_0L \cap {}_6L = \emptyset$

$$\Rightarrow \quad {}_0L \parallel {}_6L.$$

Odredimo kakvog su oblika prave tipa II ${}_cL_r$ koje prolaze kroz tačku P?

$$\left.\begin{array}{l} P(0,1) \\ (x-c)^2 + y^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} (0-c)^2 + 1^2 = r^2 \\ c^2 + 1^2 = r^2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Postoji ∞ mnogo pravih tipa II koje prolaze kroz tačku $P(0,1)$.

One su oblika ${}_cL_r$ gdje su $c, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ i $c^2 + 1^2 = r^2$

Uz pomoć programa GeoGebra nacrtaj tačku P i nacrtaj nekoliko pravih koje imaju ovu osobinu.

Napravi klizač (slider) - dodjeli mu vrijednost c, ukucaj

r=sqrt(c^2+1)

y=sqrt(r^2-(x-c)^2)

x=6

Trebamo odrediti one c i r za koje vrijedi da je ${}_6L \cap {}_cL_r = \phi$. gdje je $c^2+1=r^2$.

${}_6L$: $x=6$

${}_cL_r$: $(x-c)^2+y^2=r^2$

$P(0,1)$: $c^2+1=r^2$

$$(6-c)^2+y^2=c^2+1$$

$$y^2=c^2+1-(6-c)^2$$

$$y^2 \geq 0 \Rightarrow c^2+1-(6-c)^2 \geq 0$$

$$c^2+1-36+12c-c^2 \geq 0$$

$$12c \geq 35$$

$$c \geq \frac{35}{12}$$

Za sve $c \geq \frac{35}{12}$ prava ${}_6L$ siječe pravu ${}_cL_r$ $(r^2=c^2+1)$.

Za svako $c < \frac{35}{12}$ imamo da je ${}_cL_r \parallel {}_6L$ $(r^2=c^2+1)$

Sve prave koje prolaze kroz tačku $P(0,1)$ i koje su paralelne sa pravom ${}_6L$ su:

- ${}_0L$
- ${}_cL_{\sqrt{c^2+1}}$ gdje je $c < \frac{35}{12}$ (ovih parboji ∞ mnogo).

(#) Odrediti sve prave na Rimanovoj sferi $\mathcal{R}=\{S^2, \mathcal{L}_R\}$ koje prolaze kroz tačku $N(0,0,1)$ a koje su paralelne sa sfernom pravom $\mathcal{G}=\{(x,y,z)\in S^2 \mid z=0\}$.

Rj.

Rimanova sfera $\mathcal{R}=\{S^2, \mathcal{L}_R\}$

$$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

$\mathcal{L}_R$ skup svih glavnih krugova na S^2

$$\{(x,y,z)\in S^2 \mid ax+by+cz=0,\ a,b,c\in\mathbb{R} \text{ fiksirani, bar jedan } \neq 0\}$$

Datu sfernu pravu označimo sa $\mathcal{G}_1$

$$\mathcal{G}_1=\{(x,y,z)\in S^2 \mid z=0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1 \text{ i } z=0\}$$
$$=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$$

Odredimo kakvog su oblika prave koje prolaze kroz tačku $N(0,0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ ax+by+cz=0 \end{array}\right\} \overset{N(0,0,1)}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} c\cdot 1=0 \\ c=0 \end{array}$$

Prave koje prolaze kroz tačku $N(0,0,1)$ su oblika

$$\mathcal{G}_2=\{(x,y,z)\in S^2 \mid ax+by=0,\ a,b \text{ fiksirani realni brojevi od kojih je bar jedan } \neq 0\}$$

Da li je $\mathcal{G}_1\cap\mathcal{G}_2=\emptyset$ za neko $a,b\in\mathbb{R}$? ($a\neq 0$ ili $b\neq 0$)

i koja prolazi kroz tačku N

$$\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ ax+by=0 \end{array} \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} \begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ y=-\frac{a}{b}x \end{array} \Rightarrow y^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

Kako ovaj sistem uvijek ima rješenje ne postoji prava koja je paralelna datoj pravoj.

GeoGebra:

x^2+y^2+z^2=1

(0, 0, 1)

z=0

Intersect two surfaces

<u>Definicija</u> (relacija ekvivalencije)

Relacija ekvivalencije na skupu X je relacija $R \subseteq X \times X$ takva da

(i) $(x, x) \in R$ za sve $x \in X$ (osobina refleksivnosti)

(ii) $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (osobina simetrije)

(iii) $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (osobina tranzitivnosti)

Ako je data relacija ekvivalencije na skupu X, obično umjesto $(x, y) \in R$ pišemo $x \sim y$.

(#) Neka je $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$ apstraktna geometrija. Ako su ℓ_1 i ℓ_2 prave u $\mathcal{L}$ napisaćemo $\ell_1 \sim \ell_2$ ako je ℓ_1 paralelno sa ℓ_2. Dokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Ako je $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$ Dekartova ravan tada se svaka klasa ekvivalencije može okarakterisati realnim brojem ili beskonačnošću. Koji je broj u pitanju?

Rj: Prisjetimo se: za dvije prave ℓ_1 i ℓ_2 iz apstraktne geometrije kažemo da su paralelne (što pišemo $\ell_1 \parallel \ell_2$) ako je ili $\ell_1 = \ell_2$ ili $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$.

REFLEKSIVNOST

$\forall \ell \in \mathcal{L} \quad \ell = \ell \Rightarrow \ell \parallel \ell \Rightarrow \ell \sim \ell$ relacija $\sim$ je refleksivna

SIMETRIČNOST

$\forall \ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L} \quad \ell_1 \sim \ell_2 \Rightarrow \ell_1 \parallel \ell_2 \Rightarrow$ ili $\ell_1 = \ell_2$ ili $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$

Ako je $\ell_1 = \ell_2$ tada $\ell_2 = \ell_1 \Rightarrow \ell_2 \parallel \ell_1 \Rightarrow \ell_2 \sim \ell_1$

Ako je $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ tada $\ell_2 \cap \ell_1 = \emptyset \Rightarrow \ell_2 \parallel \ell_1 \Rightarrow \ell_2 \sim \ell_1$

relacija $\sim$ je simetrična

TRANZITIVNOST

$\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathcal{L} \quad \ell_1 \sim \ell_2 \Rightarrow \ell_1 \parallel \ell_2 \Rightarrow$ ili $\ell_1 = \ell_2$ ili $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$

$\ell_2 \sim \ell_3 \Rightarrow \ell_2 \parallel \ell_3 \Rightarrow$ ili $\ell_2 = \ell_3$ ili $\ell_2 \cap \ell_3 = \emptyset$

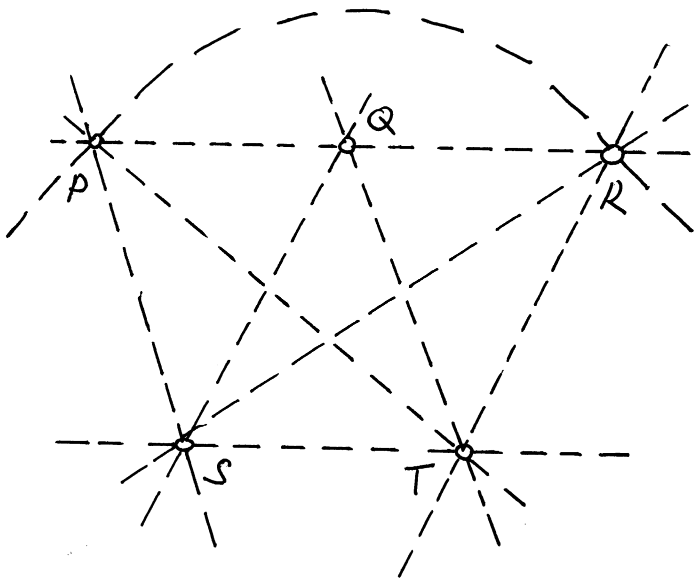
1° $\ell_1 = \ell_2$ i $\ell_2 = \ell_3 \Rightarrow \ell_1 = \ell_3 \Rightarrow \ell_1 \parallel \ell_3 \Rightarrow \ell_1 \sim \ell_3$

2° $\ell_1 = \ell_2$ i $\ell_2 \cap \ell_3 = \emptyset \Rightarrow \ell_1 \cap \ell_3 = \emptyset \Rightarrow \ell_1 \parallel \ell_3 \Rightarrow \ell_1 \sim \ell_3$

3° $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ i $l_2 = l_3$ $\Rightarrow$ $l_1 \cap l_3 = \emptyset$ $\Rightarrow$ $l_1 \parallel l_3$ $\Rightarrow$ $l_1 \sim l_3$

4° $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ i $l_2 \cap l_3 = \emptyset$

Posmatrajmo sljedeću apstraktnu geometriju



$p(P,R) \parallel p(S,Q)$

$p(P,R) \parallel p(T,Q)$

Ali primjetimo da $p(S,Q)$ nije paralelno sa $p(T,Q)$.

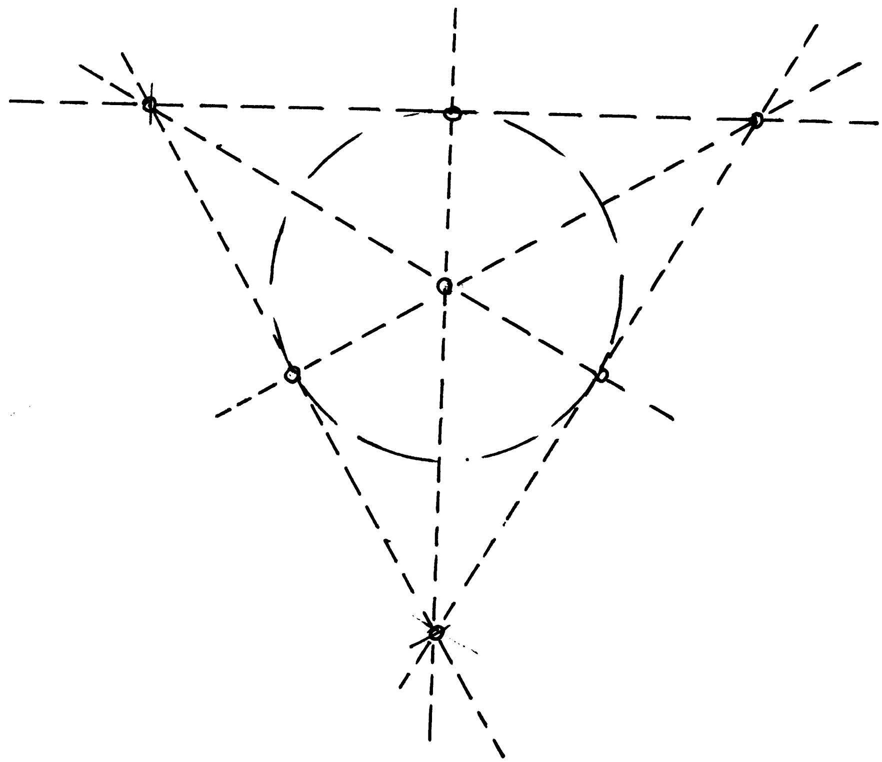
Relacija $\sim$ nije relacija ekvivalencije

U Dekartovoj ravni klase ekvivalencije možemo okarakterisati sa koeficijentom pravca za nevertikalne prave i sa ∞ za vertikalne prave.

(#) Postoji konačna geometrija sa 7 tački sa osobinom da svaka prava sadrži tačno 3 tačke. Pronaći ovu geometriju. Koliko pravih ima ova geometrija?

Rj.:

Ova geometrija je poznata pod imenom Fanova ravan



Ova geometrija sadrži sedam pravih, od kojih svaka prava sadrži tačno tri tačke.

(#) Neka je $\mathcal{S}=\mathbb{R}^2$ i za dati izbor a, b i c neka je

$$J_{a,b,c}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=c\}.$$

Neka je $\mathcal{L}_J$ skup svih $J_{a,b,c}$ gdje je najmanje jedan od a ili b nenula. Dokazati da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_J\}$ geometrija incidencije. (Primjetimo da ova geometrija incidencije daje istu familiju pravih kao Dekartova ravan. Cilj ovog zadatka je da vidimo da postoje različiti načini da opišemo skup pravih ove geometrije.)

Rj: Prvo što želimo pokazati je da je $\{\mathbb{R}^2; \mathcal{L}_J\}$ apstraktna geometrija.

ZA SVAKE DVIJE TAČKE $A, B \in \mathcal{S}$ POSTOJI PRAVA $p \in \mathcal{L}_J$ TAKVA DA $A \in p$ i $B \in p$.

Neka su date tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, gdje je $A \neq B$.

$A \in J_{a,b,c} \Rightarrow ax_1+by_1=c$

$B \in J_{a,b,c} \Rightarrow ax_2+by_2=c$

1° $x_1=x_2$

Tada
$$\begin{array}{r} ax_1+by_1=c \\ -\ ax_2+by_2=c \\ \hline b(y_1-y_2)=0 \end{array} \quad \underset{(A\neq B)}{\overset{y_1\neq y_2}{\Longrightarrow}} \quad b=0$$

$ax_1=c$

Sistem ima ∞ mnogo rješenja. Ako uzmemo da je $a=t$ tada je $c=tx_1$

$\Rightarrow tx+0y=tx_1 \quad /:t$

$x=x_1$ Prava $J_{1,0,x_1}$ prolazi kroz tačke A i B.

2° $x_1 \neq x_2$

$$\begin{array}{r} ax_1+by_1=c \\ ax_2+by_2=c \\ \hline \end{array}$$

a, b i c su nepoznate

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & y_1 & -1 & 0 \\ x_2 & y_2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Dvije linearne jednačine sa tri nepoznate imaju beskonačno mnogo rješenja (jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno).

Npr. $a=t$. Tada
$$\left.\begin{array}{l} tx_1+by_1=c \\ tx_2+by_2=c \end{array}\right\} \Rightarrow tx_1+by_1=tx_2+by_2$$

$$b(y_1-y_2)=tx_2-tx_1$$

Pa drugi slučaj podijelimo u dva podslučaja.

(i) Pretpostavimo da je $y_1 \neq y_2$.

Tada
$$b=\frac{tx_2-tx_1}{y_1-y_2}=t\left(\frac{x_2-x_1}{y_1-y_2}\right)=(-t)\left(\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\right)$$

$$\Rightarrow c=tx_1+t\,\frac{x_2-x_1}{y_1-y_2}$$

Pa $ax+by=c$ postaje $\quad tx-t\,\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\,y=tx_1-t\,\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1} \quad /:t$

Prava $J_{1,\,-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1},\,x_1-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}}$ prolazi kroz tačke A i B

(ii) $y_1=y_2$

$$\begin{array}{r} ax_1+by_1=c \\ -\quad ax_2+by_2=c \\ \hline a(x_1-x_2)=0 \end{array} \quad \xRightarrow{x_1\neq x_2} \quad a=0$$

$by_1=c$

Ako stavimo da je $b=t$

$\Rightarrow \quad c=ty_1$

$$ax+by=c \quad \Rightarrow \quad 0\cdot x+ty=ty_1 \quad /:t$$
$$y=y_1$$

Prava $J_{0,1,y_1}$ prolazi kroz tačke A i B.

Time smo pokazali prvu osobinu iz definicije apstraktne geometrije

SVAKA PRAVA SADRŽI NAJMANJE DVIJE TAČKE

Neka je data prava $J_{a,b,c}$. $\quad ax+by+c=0$

Za $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ ova prava sadrži npr. tačke $\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ i $\left(-\frac{c}{a},0\right)$.

Za $a=0$ prava $J_{0,b,c}$ sadrži $\overset{npr.}{}$ tačke $(1, -\frac{c}{b})$ i $(3, -\frac{c}{b})$.
Za $b=0$ prava $J_{a,0,c}$ sadrži $\overset{npr.}{}$ tačke $(-\frac{c}{a}, 7)$ i $(-\frac{c}{a}, -5)$

Prema tome $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_J\}$ je apstraktna geometrija.

Ostalo je još da pokažemo da su zadovoljene dvije aksiome iz definicije geometrije incidencije.

SVAKE DVIJE RAZLIČITE TAČKE PRIPADAJU JEDINSTVENOJ PRAVOJ

Pa neka su date tačke $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$. Pa pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da postoje dvije različite prave J_{a_1,b_1,c_1} i J_{a_2,b_2,c_2} koje sadrže tačke $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$, $(A \neq B)$.

1° $x_1 = x_2$

$$\left.\begin{array}{l} A \in J_{a_1,b_1,c_1} \Rightarrow a_1x_1 + b_1y_1 = c_1 \Rightarrow b_1y_1 = c_1 - a_1x_1 \\ B \in J_{a_1,b_1,c_1} \Rightarrow a_1x_2 + b_1y_2 = c_1 \Rightarrow b_1y_2 = c_1 - a_1x_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{b_1 \neq 0} y_1 = y_2 \Rightarrow A = B \ \#\text{kontradikcija}$$

Slično

$$\left.\begin{array}{l} A \in J_{a_2,b_2,c_2} \Rightarrow a_2x_1 + b_2y_1 = c_2 \Rightarrow b_2y_1 = c_2 - a_2x_1 \\ B \in J_{a_2,b_2,c_2} \Rightarrow a_2x_2 + b_2y_2 = c_2 \Rightarrow b_2y_2 = c_2 - a_2x_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{b_2 \neq 0} y_1 = y_2 \Rightarrow A = B \ \#\text{kontradikcija}$$

Time ako A i B istovremeno pripadaju pravama J_{a_1,b_1,c_1} i J_{a_2,b_2,c_2} moramo imati da je $b_1=0$ i $b_2=0$.

$$\left.\begin{array}{l} A \in J_{a_1,0,c_1} \Rightarrow a_1x_1 = c_1 \Rightarrow x_1 = \frac{c_1}{a_1} \\ B \in J_{a_2,0,c_2} \Rightarrow a_2x_2 = c_2 \Rightarrow x_2 = \frac{c_2}{a_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{prave } a_1x = c_1 \text{ i } a_2x = c_2 \text{ su iste prave } \left(\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}\right)$$

$$\Rightarrow J_{a_1,0,c_1} = J_{a_2,0,c_2} \ \#\text{kontradikcija}$$

2° $y_1 = y_2$

$$\left.\begin{array}{l} A \in J_{a_1,b_1,c_1} \Rightarrow a_1x_1 + b_1y_1 = c_1 \Rightarrow a_1x_1 = c_1 - b_1y_1 \\ B \in J_{a_1,b_1,c_1} \Rightarrow a_1x_2 + b_1y_2 = c_1 \Rightarrow a_1x_2 = c_1 - b_1y_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{a_1 \neq 0} x_1 = x_2 \Rightarrow A = B$$

#kontradikcija

Slično

$$\left.\begin{array}{l} A \in J_{a_2,b_2,c_2} \Rightarrow a_2x_1 = c_2 - b_2y_1 \\ B \in J_{a_2,b_2,c_2} \Rightarrow a_2x_2 = c_2 - b_2y_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{a_2 \neq 0} x_1 = x_2 \Rightarrow A = B$$

#kontradikcija.

Time ako A i B istovremeno pripadaju pravama J_{a_1,b_1,c_1} i J_{a_2,b_2,c_2} moramo imati da je $a_1 = 0$ i $a_2 = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l} b_1y = c_1 \\ b_2y = c_2 \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \in J_{0,b_1,c_1} \Rightarrow b_1y_1 = c_1 \Rightarrow y_1 = \frac{c_1}{b_1} \\ B \in J_{0,b_2,c_2} \Rightarrow b_2y_2 = c_2 \Rightarrow y_2 = \frac{c_2}{b_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$$

$\Rightarrow$ Prave $b_1y = c_1$ i $b_2y = c_2$ su iste prave $\Rightarrow J_{0,b_1,c_1} = J_{0,b_2,c_2}$

#kontradikcija

3° $x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$

$$\left.\begin{array}{l} A \in J_{a_1,b_1,c_1} \Rightarrow a_1x_1 + b_1y_1 = c_1 \\ B \in J_{a_1,b_1,c_1} \Rightarrow a_1x_2 + b_1y_2 = c_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ako je } b_1 = 0 \text{ tada } x_1 = x_2$$

#kontradikcija

Prema tome $b_1 \neq 0$.

$$b_1 \neq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}x_1 \\ y_2 = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}x_2 \end{array}$$

Ako označimo sa $m = -\frac{a_1}{b_1}$ i sa $b = \frac{c_1}{b_1}$ imamo

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = mx_1 + b \\ y_2 = mx_2 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b = y_1 - mx_1 \end{array} \quad \ldots(1)$$

Slično

$$\left.\begin{array}{l} A \in J_{a_2,b_2,c_2} \Rightarrow a_2x_1 + b_2y_1 = c_2 \\ B \in J_{a_2,b_2,c_2} \Rightarrow a_2x_1 + b_2y_1 = c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ako je } b_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

#kontradikcija

Prema tome $b_2 \neq 0$.

$$Y_1 = \frac{c_2}{b_2} - \frac{a_2}{b_2} x_1$$

$$Y_2 = \frac{c_2}{b_2} - \frac{a_2}{b_2} x_1$$

Označimo sa $n = -\frac{a_2}{b_2}$; $c = \frac{c_2}{b_2}$.

Tada

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = n x_1 + c \\ Y_2 = n x_2 + c \end{array}\right\} \Rightarrow n = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} \quad \dots (2)$$

$$c = Y_1 - n x_1$$

Na osnovu (1) i (2)

$$m = n \ ; \ b = c \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \ ; \ \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$$

$\Rightarrow$ Prave $a_1 x + b_1 Y = c_1$ i $a_2 x + b_2 Y = c_2$ predstavljaju istu pravu $\Rightarrow$ $J_{a_1, b_1, c_1} = J_{a_2, b_2, c_2}$

\# kontradikcija

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome svake dvije različite tačke pripadaju jedinstvenoj pravoj.

POSTOJE TRI NEKOLINEARNE TAČKE

Neka je npr. $M(1,2)$, $N(1,3)$, $R(7,7)$

$$\left.\begin{array}{l} M \in J_{a,b,c} \Rightarrow a + 2b = c \\ N \in J_{a,b,c} \Rightarrow a + 3b = c \end{array}\right\} \Rightarrow 2b = 3b \Rightarrow b = 0$$

$$R \in J_{a,b,c} \Rightarrow 7a + 7b = c$$

$$\left.\begin{array}{l} a = c \\ 7a = c \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow a = 0 \ ; \ b = 0$$

\#kontradikcija

Model $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_J\}$ je geometrija incidencije.